

Classes particulières des relations ternaires

Gagui *Ayyoub*

Date de soutenance : 02 juillet 2019

Remerciements

Tout d'abord, je remercie mon Dieu parce qu'il nous a donné la confiance et la volonté pour arriver à ce niveau d'études et le courage de faire ce travail.

Je tiens à remercier dans un premier tems mon encadreur de mémoire Prof. Lemnaouar ZEDAM, pour sa patience, sa disponibilité et ses conseils.

Je tiens également à exprimer ma gratitude aux membres du jury : Prof. Abdelaziz AMROUNE, pour avoir accepté d'être président du jury, Dr. Soheyb MILLES et Dr. Lahçen LADJELAT, pour avoir accepté d'être examinateurs de ce travail.

Enfin, je n'oublie pas d'adresser mes vifs remerciements à toute ma petite famille, qui ma accompagnée tout au long de mes études en particulièrement ma mère par leur amour inconditionnel et leur soutien constant.

Table des matières

Introduction	iv
1 Généralités sur les relations binaires	1
1.1 Définitions et exemples	1
1.2 Représentations des relations binaires	3
1.2.1 Représentation matricielle	3
1.2.2 Représentation graphique	3
1.2.3 Domaine et image	4
1.2.4 Ensemble des relations	5
1.3 Opérations ensemblistes sur les relations binaires	5
1.4 Propriétés des relations binaires	8
1.4.1 Réflexivité, irreflexivité et non-réflexivité	9
1.4.2 Symétrie et antisymétrie	10
1.4.3 Transitivité et intransitivité	11
1.4.4 Circularité	12
1.4.5 Interactions des propriétés fondamentales avec des opérations ensemblistes	12
1.4.6 La clôture transitive	13
1.5 Nombre des relations binaires sur des ensembles finis	15
1.6 Classes particulières des relations binaires	16
1.6.1 Relations d'équivalences	16
1.6.2 Relations d'ordres	19
1.6.3 Relation d'équivalence et relation d'ordre obtenues par une relation de préordre	20

2 Relations ternaires et certaines classes particulières	21
2.1 Définitions, exemples et représentation matricielle	21
2.2 Opérations ensemblistes (set-operations) sur les relations ternaires	23
2.3 Relations ternaires obtenues par permutation	24
2.4 Compositions des relations ternaires avec des relations binaires	26
2.5 Propriétés des relations ternaires	27
2.5.1 Réflexivité, irréflexivité, fortement réflexivité et fortement irréflexivité . .	27
2.5.2 Symétrie, asymétrie, fortement symétrie et fortement asymétrie	28
2.5.3 Cyclicité	28
2.5.4 Complète et fortement complète	29
2.5.5 c_i -transitivité	30
2.6 Projections binaires d'une relation ternaire	32
2.7 Extensions cylindriques d'une relation binaire	34
2.8 Nombre des relations ternaires sur des ensembles finis	36
2.9 Classes particulières des relations ternaires	37
2.9.1 Relations d'équivalences ternaires	37
2.9.2 Relations de betweennesses	39
 Annexe : Exemples d'applications des relations ternaires dans la base de données	 42
 Bibliography	 46

NOTATIONS

\mathcal{R}	Relation binaire
\mathcal{R}^t	Relation transpose binaire
\mathcal{R}^c	Relation complément binaire
\mathcal{R}^s	Fermuture symétrique
$\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$	Composition de \mathcal{R} et \mathcal{S}
$M_{\mathcal{R}}$	Matrice associé à \mathcal{R}
$G_{\mathcal{R}}$	Relation graphique binaire
$Dom(\mathcal{R})$	Domaine de \mathcal{R}
$Im(\mathcal{R})$	Image de \mathcal{R}
$Im_{\mathcal{R}}(x)$	Image d'un point de \mathcal{R}
U_{XY}	Relation universelle binaire
0_{XY}	Relation vide binaire
Δ_X	Relation identique (identité) de X
X/\mathcal{R}	Ensemble quotient de X par \mathcal{R}
\mathcal{T}	Relation ternaire
\mathcal{T}^t	Relation transpose de \mathcal{T}
\mathcal{T}^c	Relation complémentaire de \mathcal{T}
I_X	Relation identité ternaire
$M_{\mathcal{T}}$	Matrice associé à \mathcal{T}
σ	Permutation de $\{x, y, z\}$
$\mathcal{P}_g(\mathcal{T})$	Projection gauche de \mathcal{T}
$\mathcal{P}_c(\mathcal{T})$	Projection centrale de \mathcal{T}
$\mathcal{P}_d(\mathcal{T})$	Projection droite de \mathcal{T}
$\mathcal{C}_g(\mathcal{R})$	Extension cylendrique gauche de \mathcal{R}
$\mathcal{C}_c(\mathcal{R})$	Extension cylendrique centrale de \mathcal{R}
$\mathcal{C}_d(\mathcal{R})$	Extension cylendrique droite de \mathcal{R}
\mathcal{B}	Relation de betweenness

Introduction

Les relations entre les éléments d'ensembles se produisent dans de nombreux contextes [15]. Chaque jour, nous traitons des relations telles que celles entre un employé et son salaire ou un employé et les tâches de travail, une personne et un parent ou bien les relations familiales et ainsi de suite. Les relations entre les éléments d'ensembles sont représentées en utilisant la structure (ou la notion) appelée relation, qui est juste un sous-ensemble du produit cartésien des ensembles. Les relations peuvent être utilisées pour modéliser, expliquer ou résoudre des problèmes, telles que la détermination des paires de villes qui sont reliées par des vols des compagnies aériennes dans un ordre [8, 21], trouver un ordre viable pour les différentes phases d'un projet complexe [5], ou la production d'un moyen utile pour stocker des informations dans des bases de données informatiques...etc [9, 11, 21]

Depuis les années soixante-dix du dernier siècle, la situation a considérablement évolué [9]. Les travaux sur les relations sont multipliés pour répondre aussi bien à des motivations internes de « Mathématiques pures » qu'aux problèmes soulevés à l'occasion de l'usage de ces structures par des « Mathématiques appliquées » dans des domaines comme la recherche opérationnelle, la microéconomie, l'analyse et la fouille de données, la biologie, la robotique, l'informatique théorique, l'algorithmique,... etc [1]. Aujourd'hui, il faudrait au moins des 1000 pages pour présenter seulement une synthèse des résultats obtenus [19].

Il n'est donc pas étonnant, compte tenu du développement de l'utilisation des mathématiques dans la modélisation de multiples phénomènes, de trouver de nombreux domaines où les concepts de différentes classes (binaires, ternaires, ..., n -aires) sont employées. Certes, en mathématiques, les relations binaires, notamment, la notion d'ordre des grandeurs est connue depuis longtemps et c'est au seizième siècle qu'apparaissent pour la première fois les symboles $>$ et $<$ pour désigner « plus grand que » et « plus petit que ». Mais la notion abstraite d'ordre

définie comme un type particulier de relation transitive n'a été élaborée qu'entre les années 1880 et 1914 par des mathématiciens et/ou logiciens comme **Peirce, Peano, Schröder, Cantor, Dedekind, Russel, Huntington, Scheffer et Hausdorff** (voir [1]).

Ces raisons et l'importance du sujet des relations étaient derrière le choix de ce sujet pour un mémoire de Master sur les relations binaires et ternaires. Dans lequel, nous allons discuter les différents concepts et propriétés de différents classes des relations (relations binaires, relations ternaires). Dans le cadre de relations ternaires, nous présenterons ses différents notions et propriétés généralisés des relations binaires.

Ce mémoire est réparti en deux chapitres et une Annexe :

Dans le premier chapitre, nous allons étudier les notions et définitions de base concernant les relations binaires et leurs propriétés. Ainsi que, certaines classes particulies des relations binaires, telles que les relations **d'équivalences** et les relations **d'ordres**.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques notions et définitions de base concernant les relations ternaires et leurs propriétés, **l'inclusion, l'union, l'intersection, permutation,...** Ainsi que, certaines classes particuliers des relations ternaires, telles que les relations **d'équivalences ternaires** et relations de **betweennesses**.

Dans l'annexe, on donne quelques exemples d'applications des relations ternaires dant le but de bien comprendre ses utilisations.

Chapitre 1

Généralités sur les relations binaires

Dans ce chapitre, on donne quelques notions et définitions de base concernant les relations binaires et leurs propriétés. Ainsi que, certaines classes particulières des relations binaires, telles que les relations d'équivalences et les relations d'ordre. Pour une discussion plus détaillée de ces concepts nous renvoyons le lecteur aux [1, 2, 6, 7, 11, 17, 18, 19].

1.1 Définitions et exemples

Dans cette section, nous rappelons quelques notions et définitions de base sur les relations binaires pour les utiliser dans les sections suivantes.

Définition 1.1. (*Produit cartésien*)

Soient X_1, X_2, \dots, X_n des ensembles non vides, $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ est l'ensemble des n -uplets ordonnés (x_1, x_2, \dots, x_n) , avec $x_i \in X_i$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Ces n -uplets sont encore appelées *<vecteurs>*. Pour tout ensemble X , on note X^n le produit cartésien $X \times X \times \dots \times X$ (n fois).

Les éléments de X^n sont les n -uplets d'éléments de X .

En particulier pour ($n = 2$) : Soient X et Y deux ensembles non vides.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

- Si $X = Y$, $X \times Y = X^2$ (*carré cartésien*).
- Si $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, alors $X \times Y = Y \times X = \emptyset$.

Notation 1.1.

Soit $(x, y) \in X \times Y$.

x est la **première coordonnée** du couple (x, y) .

y est la **deuxième coordonnée** du couple (x, y) .

Si $((x, y), (x', y')) \in (X \times Y)^2$. Alors :

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'.$$

$$(x, y) \neq (x', y') \Leftrightarrow x \neq x' \text{ ou } y \neq y'.$$

Exemple 1.1.

Soient X et Y deux ensembles finis tels que $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{a, b, c\}$. Alors,

(i) Le produit de $X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$.

(ii) Le produit de $X \times X = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

Définition 1.2. (Relation binaire)

Soient X et Y deux ensembles. On appelle **relation binaire** de X vers Y toute partie de $X \times Y$.

Si \mathcal{R} est une relation binaire de X vers Y et si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on note alors $x\mathcal{R}y$ ou $\mathcal{R}(x, y)$.

On appelle **relation binaire sur un ensemble** X , toute relation binaire de X vers X .

Exemple 1.2.

(i) Soient $X = \{a, b, c, d\}$ et $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Alors :

$$\mathcal{R} = \{(a, 1), (b, 4), (c, 1), (d, 2)\}$$

Est une relation binaires.

(ii) Soient $X = \mathbb{Z}$ et $Y = \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 16), (2, 16), \dots\} \\ &= \{(x, x^4) : x \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Définition 1.3. (Relation inverse)

Soit \mathcal{R} une relation binaire de X vers Y . La relation inverse de \mathcal{R} (transpose de \mathcal{R}) est la collection des paires $(y, x) \in Y \times X$ tels que $(x, y) \in \mathcal{R}$, i.e.

$$\mathcal{R}^t = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Exemple 1.3.

Pour la relation \mathcal{R} donner dans l'exemple 1.2 (ii), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^t &= \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (16, -2), (16, 2), \dots\} \\ &= \{(x^4, x) : x \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

1.2 Représentations des relations binaires

On suppose que X et Y sont des ensembles finis de cardinal \mathbf{m} et \mathbf{n} , respectivement.

1.2.1 Représentation matricielle

On peut représenter \mathcal{R} par une **matrice** $M_{\mathcal{R}} = (l_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ comportant \mathbf{m} lignes et \mathbf{n} colonnes dont les coefficients sont 0 ou 1. Les éléments de la matrice $M_{\mathcal{R}}$ sont définis de la manière suivante :

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \mathcal{R} y_j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1.4.

La représentation matricielle de la relation de l'exemple 1.2. (i) est donnée par :

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.1. On note que,

$$M_{\mathcal{R}^t} = (M_{\mathcal{R}})^t.$$

1.2.2 Représentation graphique

On peut représenter \mathcal{R} par un **graphe bipartite** (c'est-à-dire qu'il y a une partition $X \cup Y$ des sommets du graphe et que chaque arc (flèche) va de X vers Y).

On définit maintenant le graphe de \mathcal{R} comme :

$$G_{\mathcal{R}} = (X \cup Y, \mathcal{R}).$$

Remarque 1.2. (Graphe d'une relation inverse)

Le graphe de \mathcal{R}^t est obtenu en inversant les flèches d'arcs du graphe de \mathcal{R} .

Exemple 1.5.

Soient $X = \{\text{Alexander}, \text{Bill}, \text{Cimon}\}$, $Y = \{\text{William}, \text{Xavi}, \text{Yaya}, \text{Ziland}\}$.

Et la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x est le **moniteur** de y .

$$\mathcal{R} = \{(\text{Alexander}, \text{Ziland}), (\text{Bill}, \text{William}), (\text{Cimon}, \text{Yaya})\}.$$

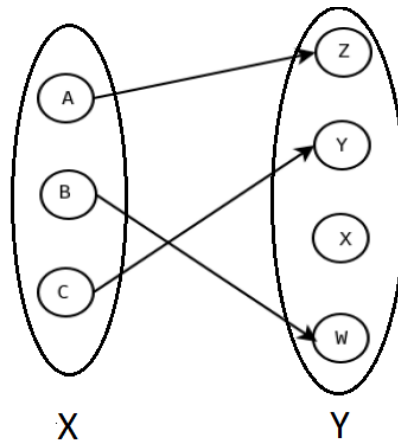


FIGURE 1.1 – La représentation graphique de la relation \mathcal{R} .

1.2.3 Domaine et image

Dans cette section, on définit le domaine et l'image d'une relation binaire, ainsi que quelques propriétés. Pour plus de détails sur les relations binaires, le lecteur peut consulter [7].

Définition 1.4.

Soit \mathcal{R} une relation de X à Y .

- On appelle **domaine** de \mathcal{R} , l'ensemble des éléments de X ayant par \mathcal{R} une image dans Y .

On note :

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{x \in X \mid \exists y \in Y : x\mathcal{R}y\}.$$

- On appelle **image d'un point** a de X par \mathcal{R} , l'ensemble éventuellement vide des éléments b de Y tels que $(a, b) \in \mathcal{R}$. On note :

$$\text{Im}_{\mathcal{R}}(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

- On appelle **image** ou **codomaine** de \mathcal{R} , l'ensemble des éléments de Y image(s) par \mathcal{R} d'au moins un élément de X . On note :

$$Im(\mathcal{R}) = \{y \in Y \mid (\exists x \in X) \text{ telque } (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

Propriétés : Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} deux relations dans $X \times Y$:

1. $Dom(\mathcal{R}) \subseteq X$, $Im(\mathcal{R}) \subseteq Y$, $\mathcal{R} \subseteq Dom(\mathcal{R}) \times Im(\mathcal{R})$.
2. Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \subseteq X \times Y \implies Dom(\mathcal{R}) \subseteq Dom(\mathcal{S})$, $Im(\mathcal{R}) \subseteq Im(\mathcal{S})$.
3. La relation inverse \mathcal{R}^t est toujours définie, c-à-d :

$$Dom(\mathcal{R}^t) = Im(\mathcal{R}), \quad Im(\mathcal{R}^t) = Dom(\mathcal{R}).$$

4. $\mathcal{R} \subseteq X \times Y \iff \mathcal{R}^t \subseteq Y \times X$.
5. $(\mathcal{R}^t)^t = \mathcal{R}$ /involution.
3. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \subseteq X \times Y \implies \mathcal{R}^t \subseteq \mathcal{S}^t \subseteq Y \times X$.

1.2.4 Ensemble des relations

On notera \mathcal{R}_{XY} l'ensemble des relations de X à Y , de fait identique à $P(X \times Y)$.

Dans le cas où X et Y sont finis, le nombre des relations de X vers Y est donc : $2^{|X| \cdot |Y|}$.

Définition 1.5.

Soient X, Y deux ensembles. Parmi les relations de X à Y , on note :

0_{XY} la relation **nulle** ou **vide**, jamais satisfaite, dont la matrice caractéristique ne contiendra que des 0.

$U_{XY} = X \times Y$ la relation **universelle** ou **complète**, toujours satisfaite, dont la matrice caractéristique ne contiendra que des 1.

1.3 Opérations ensemblistes sur les relations binaires

Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} deux relations dans X vers Y . Tant que \mathcal{R} et \mathcal{S} sont des sous-ensembles de $X \times Y$, on peut leur appliquer les opérations ensemblistes de, **l'inclusion**, **l'union**, **l'intersection**, **le complément** et **la composition** pour construire des relations de X vers Y . Pour plus de détails sur les relations binaires, nous nous référons aux [7, 11].

1. L'inclusion

Soient \mathcal{R}, \mathcal{S} deux relations binaires. On dit que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ si pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$, alors $(x, y) \in \mathcal{S}$.

2. L'union et l'intersection

L'union de \mathcal{R} et \mathcal{S} est la relation $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, définie par :

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \{(x, y) \in X \times Y \mid x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y\}.$$

L'intersection de \mathcal{R} et \mathcal{S} est la relation $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, définie par :

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(x, y) \in X \times Y \mid x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y\}.$$

La relation \mathcal{R}^t et \mathcal{S}^t vont de Y vers X . Il est facile d'établir que :

$$(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^t = \mathcal{R}^t \cup \mathcal{S}^t \text{ et } (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^t = \mathcal{R}^t \cap \mathcal{S}^t.$$

Proposition 1.1.

Soient $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq X \times Y$ deux relations quelconques, on a :

- (i) $M_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}} \vee M_{\mathcal{S}}$ i.e : $\forall i, j : (M_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}})_{ij} = r_{ij} \vee s_{ij}$, où \vee dénote le **ou inclusif**.
- (ii) $M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}} \wedge M_{\mathcal{S}}$ i.e : $\forall i, j : (M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}})_{ij} = r_{ij} \wedge s_{ij}$, où \wedge dénote le **et**.
- (iii) $0_{XY} \cup \mathcal{R} = U_{XY} \cap \mathcal{R} = \mathcal{R} = \mathcal{R} \cup 0_{XY} = \mathcal{R} \cap U_{XY}$.
- (iv) $0_{XY} \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subseteq U_{XY}$.

Exemple 1.6.

Soient \mathcal{R} et \mathcal{S} deux relations sur X définies par la matrice associée :

$$M_{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices associées à l'union et l'intersection sont définies respectivement :

$$M_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}} \vee M_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}} \wedge M_{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Le complément

Soit \mathcal{R} une relation de $X \times Y$, on note \mathcal{R}^c la relation **complémentaire** de \mathcal{R} , i.e.,

$$\mathcal{R}^c = \{(x, y) \in X \times Y \mid (x, y) \notin \mathcal{R}\}.$$

Autrement dit : $\mathcal{R}^c = (X \times Y) - \mathcal{R}$.

La matrice associée à la relation \mathcal{R}^c est la matrice **complément** de $M_{\mathcal{R}}$, telle qu'on transforme les 0 dans la matrice par 1 et 1 par 0 :

$$M_{\mathcal{R}^c} = (M_{\mathcal{R}})^c.$$

Exemple 1.7.

Soit $X = \{x, y\}$, on définit la relation \mathcal{R} sur X par :

$$\mathcal{R} = \{(x, x), (y, x)\}.$$

Donc,

$$\mathcal{R}^c = X^2 - \mathcal{R} = \{(x, y), (y, y)\}.$$

Proposition 1.2.

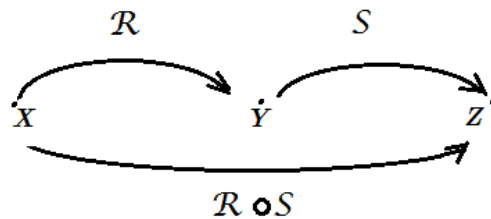
Soient \mathcal{R}, \mathcal{S} deux relations binaires. Alors :

$$(i) (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^c = \mathcal{R}^c \cup \mathcal{S}^c.$$

$$(ii) (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^c = \mathcal{R}^c \cap \mathcal{S}^c.$$

4. Compositions des relations binaires

Soient les relations $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ et $\mathcal{S} \subseteq Y \times Z$, on appelle **composée** de \mathcal{R} et \mathcal{S} la relation notée $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq X \times Z$ est définie par :



$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(x, z) \in X \times Z \mid (\exists y \in Y) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{S}z)\}.$$

Remarque 1.3.

En général, $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \neq \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, i.e., la composition des relations n'est pas commutative.

Proposition 1.3.

Soient $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ et $\mathcal{S} \subseteq Y \times Z$. Alors :

- (i) $\text{Dom}(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \subseteq \text{Dom}(\mathcal{R})$, $\text{Im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \text{Im}(\mathcal{S})$.
- (ii) $0_{XY} \circ \mathcal{S} = 0_{XZ} = \mathcal{R} \circ 0_{YZ}$.
- (iii) Si $\mathcal{P} \subseteq Z \times K$, $\mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{P}) = (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{P}$ /associativité.
- (iv) Si $\mathcal{P} \subseteq Y \times Z$, $\mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \cup \mathcal{P}) = (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{P})$ /distributivité.
- (v) $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^t = \mathcal{S}^t \circ \mathcal{R}^t$.
- (vi) Si $\mathcal{P} \subseteq Y \times Z : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P} \implies \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{P}$ /monotonie.
- (vii) $M_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}} = M_{\mathcal{S}} \odot M_{\mathcal{R}}$ / \odot est le produit booléen, $(x \odot y = x \wedge y)$.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad x\mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{P})z &= \{(x, z) \mid \exists y \in Y : (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{S} \circ \mathcal{P}z)\} \\
 &= \{(x, z) \mid \exists y \in Y, \exists w \in Z : (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{S}w) \wedge (w\mathcal{P}z)\} \\
 &= \{(x, z) \mid \exists w \in Z : (x\mathcal{R} \circ \mathcal{S}w) \wedge (w\mathcal{P}z)\} \\
 &= x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{P}z.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (v) \quad x(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^tz &\iff z(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})x \\
 &\iff \exists y \in Y : (z\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{S}x) \\
 &\iff \exists y \in Y : (y\mathcal{R}^tz \wedge x\mathcal{S}^ty) \\
 &\iff \exists y \in Y : (x\mathcal{S}^ty \wedge y\mathcal{R}^tz) \\
 &\iff x(\mathcal{S}^t \circ \mathcal{R}^t)z.
 \end{aligned}$$

1.4 Propriétés des relations binaires

On s'intéresse maintenant aux propriétés fondamentales des relations binaires définies sur le même ensemble X . Plus d'informations peuvent être trouvées dans [7, 11].

1.4.1 Réflexivité, irréflexivité et non-réflexivité

La relation \mathcal{R} est dite :

- **réflexive**, si pour tout $x \in X$, $x\mathcal{R}x$;
- **irréflexive**, si pour tout $x \in X$, $(x, x) \notin \mathcal{R}$;
- **non-réflexive**, si $(\exists x \in X : (x, x) \in \mathcal{R}) \wedge (x, x) \notin \mathcal{R}$.

La proposition suivante donne quelques propriétés de la réflexivité d'une relation binaire.

Proposition 1.4.

- (i) Toute relation **réflexive** a sa matrice caractéristique de diagonale 1.
- (ii) Tout **graphe réflexif** comporte une boucle par sommet.
- (iii) Toute relation **irréflexive** a sa matrice caractéristique de diagonale 0.
- (iv) La diagonale de la matrice caractéristique d'une relation **non-réflexive** comporte **au moins un 1 et au moins un 0**.

Exemple 1.8.

- (1) La relation $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est **réflexive**, (Δ_X est appelé la relation identique (identité) de X).
- (2) Soit $X = \{1, 2, 3\}$ et R est la relation sur X définit par :

$$x\mathcal{R}y \iff x \text{ divise } y.$$

i.e., $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$.

Le fait que $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \subset \mathcal{R}$, implique alors que \mathcal{R} est **réflexive**.

- (3) La relation 0_X (la définition précédente) est **irréflexive**.
- (4) Soit $X = \{1, 2, 3\}$ et R est la relation sur X définit par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Le fait que $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \not\subset \mathcal{R}$, implique alors que \mathcal{R} est **irréflexive**.

- (5) Soit $X = \{1, 2, 3\}$ et R est la relation sur X définit par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Le fait que $(2, 2), (3, 3) \notin \mathcal{R}$, impliquent alors que \mathcal{R} est **non-réflexive**.

1.4.2 Symétrie et antisymétrie

La relation \mathcal{R} est dite :

- **symétrique**, si pour tous $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;
- **asymétrique**, si pour tous $x, y \in X$, $(x, y) \in \mathcal{R} \implies (y, x) \notin \mathcal{R}$;
- **anti-symétrique**, si pour tous $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \implies x = y$.

Exemple 1.9.

(1) Soit $X = \{1, 2, 3\}$ et \mathcal{R} est la relation sur X définit par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Le fait que $(x, y) \in \mathcal{R}$ implique que $(y, x) \in \mathcal{R}$, alors \mathcal{R} est **symétrique**.

(2) Soit X un ensemble fini tel que $X = \{1, 2, 3\}$, et \mathcal{R} est la relation sur X donné par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Le fait que $(x, y) \in \mathcal{R}$ implique que $(y, x) \notin \mathcal{R}$, alors \mathcal{R} est **asymétrique**.

(3) Soit X un ensemble fini tel que $X = \{1, 2, 3\}$, et \mathcal{R} est la relation sur X donné par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)\}.$$

Le fait que $(x, y) \in \mathcal{R}$ implique que $(y, x) \notin \mathcal{R}$, alors \mathcal{R} est **anti-symétrique**.

Proposition 1.5.

(i) La matrice associée à une relation symétrique est symétrique.

(ii) Toute relation asymétrique est irréflexive.

Démonstration :

Soit \mathcal{R} une relation **asymétrique**, et x un point tel que $x\mathcal{R}x$. Par l'asymétrie de \mathcal{R} , on aurait $(x, x) \in \mathcal{R} \implies (x, x) \notin \mathcal{R}$, et $x\mathcal{R}x$ serait **contradictoire**; il n'existe donc aucun point pour lequel on ait $x\mathcal{R}x$. Donc \mathcal{R} est **irréflexive**.

1.4.3 Transitivité et intransitivité

La relation \mathcal{R} est dite :

- **transitive**, si pour tous $x, y, z \in X$, $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$;
- **intransitive** ou (**anti-transitive**), si pour tous $x, y, z \in X$,

$$(x, y) \in \mathcal{R} \text{ et } (y, z) \in \mathcal{R} \implies (x, z) \notin \mathcal{R}.$$

Exemple 1.10.

(1) Soit X un ensemble fini tel que $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et \mathcal{R} est la relation sur X donné par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}.$$

Pour tous $x, y, z \in X$, on a :

$$\text{si } \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{R} \\ \text{et} \\ (y, z) \in \mathcal{R} \end{cases}, \text{ alors } (x, z) \in \mathcal{R}, \text{ implique que } \mathcal{R} \text{ est transitive.}$$

(2) Soit X un ensemble fini tel que $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et \mathcal{R} est la relation sur X donné par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}.$$

Pour tous $x, y, z \in X$, on a :

$$\text{si } \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{R} \\ \text{et} \\ (y, z) \in \mathcal{R} \end{cases}, \text{ alors } (x, z) \notin \mathcal{R}, \text{ implique que } \mathcal{R} \text{ est intransitive.}$$

Proposition 1.6.

Toute relation intransitive est irréflexive.

Démonstration :

Soit \mathcal{R} une relation sur un ensemble X **intransitive**. Soit $x \in X$ tel que $x\mathcal{R}x$. Par l'intransitivité de \mathcal{R} , on n'aurait que $(x, x) \in \mathcal{R}$ et $(x, x) \in \mathcal{R} \implies (x, x) \notin \mathcal{R}$, et $(x, x) \in \mathcal{R}$ serait contradictoire. Alors il n'existe aucun point pour lequel on est $(x, x) \in \mathcal{R}$. Donc \mathcal{R} est **irréflexive**.

1.4.4 Circularité

Une relation \mathcal{R} sur X est dite **circulaire** si pour tous $x, y, z \in X$ tel que $(x, y) \in \mathcal{R}$ et $(y, z) \in \mathcal{R}$, alors $(z, x) \in \mathcal{R}$, i.e.,

$$\forall x, y, z \in X, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \implies z\mathcal{R}x.$$

Exemple 1.11.

Soit X un ensemble fini tel que $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et \mathcal{R} est la relation sur X donné par :

$$\mathcal{R} = \{(2, 4), (2, 6), (4, 5), (5, 2), (6, 5)\}.$$

Pour tous $x, y, z \in X$, on a :

$$\text{si } \begin{cases} (x, y) \in \mathcal{R} \\ (y, z) \in \mathcal{R} \end{cases} \text{ et } , \text{ alors } (z, x) \in \mathcal{R}, \text{ implique que } \mathcal{R} \text{ est circulaire.}$$

1.4.5 Interactions des propriétés fondamentales avec des opérations ensemblistes

L'inclusion, l'union, l'intersection et la composition des relations s'adaptent facilement au cas où l'ensemble de départ et d'arrivée sont identiques.

Cependant, les propriétés nouvellement présentes et la relation **d'identité** introduisent de nouveaux résultats. Pour plus de détails sur les relations binaires, le lecteur peut consulter [7, 11].

Proposition 1.7.

- (i) $0_X \subseteq \Delta_X \subseteq U_X$.
- (ii) \mathcal{R} est réflexive ssi $\Delta_X \subseteq \mathcal{R}$.
- (iii) \mathcal{R} est symétrique ssi $\mathcal{R} = \mathcal{R}^t$.

Définition 1.6.

On appelle **symétrisée** de \mathcal{R} : $\mathcal{R}^s = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^t$.

Proposition 1.8.

- (i) \mathcal{R}^s est la relation symétrique **le plus fin** majorant \mathcal{R} (et \mathcal{R}^t).
- (ii) $\Delta_X \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \Delta_X = \mathcal{R}$.
- (iii) \mathcal{R} est **transitive** si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$.
- (iv) Soient deux relations \mathcal{R} et $\mathcal{S} \subseteq X^2$:

$$0_X \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subseteq U_X,$$

$$0_X \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subseteq U_X.$$

Corollaire 1.1.

La composition des relations binaires est toujours une relation binaire, donc l'opération composition est définie une loi interne, en plus, elle est **associative** d'après la proposition 1.3. (iii), et on remarque que Δ_X est neutre avec l'opération composition (élément neutre). Donc (X^2, \circ) est un **monoïde** avec un élément neutre Δ_X .

Notation 1.2.

De manière générale on pose :

$$\mathcal{R}^0 = \Delta_X,$$

$$\text{Pour } k > 0 : \quad \mathcal{R}^k = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{k-1},$$

$$\text{Pour } k < 0 : \quad \mathcal{R}^k = (\mathcal{R}^{-1})^{|k|} = (\mathcal{R}^t)^{|k|}.$$

1.4.6 La clôture transitive

Soit \mathcal{R} une relation sur X , et soient x et y des éléments de X .

Définition 1.7. (Chemin dans un graphe)

Si $n \in \mathbb{N}$, on dit que Ψ est un **\mathcal{R} -chemin** de longueur n de x à y **si et seulement si** il existe une suite

$\Psi = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ d'éléments de X telle que :

- $x_0 = x$ et $x_n = y$;
- $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} : \quad x_i \mathcal{R} x_{i+1}$.

Lorsque $x = y$, on parle de **\mathcal{R} -cycle**.

Définition 1.8. (*Fermeture transitive*)

On définit sur X une nouvelle relation \mathcal{R}^+ , que nous appellerons plus tard la **fermeture transitive** (clôture transitive) de \mathcal{R} , en posant :

$$x\mathcal{R}^+y \iff \text{il existe un chemin de } x \text{ à } y.$$

La relation \mathcal{R}^+ est donc l'union de toutes les relations \mathcal{R}^k :

$$\mathcal{R}^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}^k.$$

Dans le cas où X est fini de cardinal n , la remarque précédente nous permet d'écrire la formule plus sympathique :

$$\mathcal{R}^+ = \bigcup_{k=1}^n \mathcal{R}^k.$$

On définit encore une relation \mathcal{R}^* sur X , appelée relation de **\mathcal{R} -accessibilité** (fermeture réflexo-transitive de \mathcal{R}), en posant :

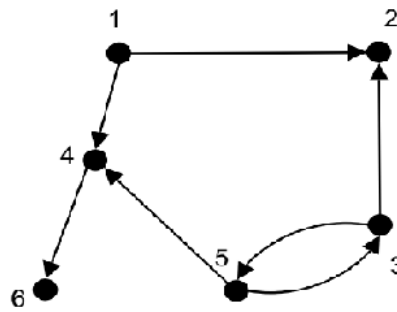
$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^{r,t} = \mathcal{R}^+ \cup \Delta_X.$$

Exemple 1.12.

Voici le **graphe** pour lequel on se propose de **calculer la fermeture transitive** en calculant les puissances successives des matrices.

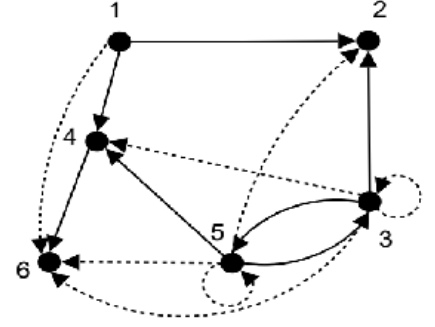
La matrice **associée** à ce graphe est la suivante :

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



La matrice associée de la fermeture transitive, ainsi que le graphe sont représentés par :

$$M_{\mathcal{R}} \vee M_{\mathcal{R}}^2 \vee M_{\mathcal{R}}^3 \vee M_{\mathcal{R}}^4 \vee M_{\mathcal{R}}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



1.5 Nombre des relations binaires sur des ensembles finis

Considérons deux ensembles finis X et Y de cardinal n et m respectivement. Le fait qu'une relation binaire \mathcal{R} est une partie de $X \times Y$, i.e., $\mathcal{R} \in P(X \times Y)$ implique que le nombre des relations binaires sur $X \times Y$ est 2^{nm} .

En particulier, si $X = Y$, on trouve 2^{n^2} relations binaires sur X .

- (i) $2^{n(n-1)}$ relations réflexives ;
- (ii) $2^{n(n+1)/2}$ relations symétriques ;
- (iii) $2^{n(n-1)/2}$ relations réflexive et symétriques ;
- (iv) Pour le nombre des relations transitives, on n'a pas une formule fermée.

Démonstration :

$$(i) \quad X \longrightarrow \mathcal{R} \subseteq X^2$$

$$\mathcal{R} \text{ réflexive} \iff \Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{R}.$$

$$\mathcal{R} = \Delta \cup A, \quad A \subseteq (X^2 \setminus \Delta), \quad |X| = n, \quad |X^2| = n^2, \quad |\Delta| = n, \quad |(X^2 \setminus \Delta)| = n^2 - n.$$

$$|P(X^2 \setminus \Delta)| = 2^{n^2 - n} = 2^{n(n-1)}.$$

(ii) Soit $A \subseteq X \times X$ tel que :

$$(x, y) \in A \implies (y, x) \in A.$$

Dans une matrice carrée de $n \times n$, prenez le triangle supérieur par exemple, et généralisez l'étude.

Le 1^{ère} ligne on a : n éléments.

Le 2^{ème} ligne on a : $(n - 1)$ éléments.

\vdots \vdots

Le $(n - 1)$ ^{ème} ligne on a : 2 éléments.

Le n ^{ème} ligne on a : 1 élément.

$$\text{Alors, } n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Et chaque élément de la matrice est pris deux valeurs, donc on a : $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(iii) Dans une matrice carrée de $n \times n$, prenez le triangle supérieur par exemple, et généralisez l'étude.

Le 1^{ère} ligne on a : $(n - 1)$ éléments.

Le 2^{ème} ligne on a : $(n - 2)$ éléments.

\vdots \vdots

Le $(n - 2)$ ^{ème} ligne on a : 2 éléments.

Le $(n - 1)$ ^{ème} ligne on a : 1 élément.

$$\text{Alors, } (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Et chaque élément de la matrice est pris deux valeurs, donc on a : $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

1.6 Classes particulières des relations binaires

Dans cette section, nous présenterons des classes particulières importantes des relations binaires. Pour une discussion plus détaillée de ces concepts nous renvoyons le lecteur aux [1, 7, 9, 11, 17, 19].

1.6.1 Relations d'équivalences

Définition 1.9. (*Relation d'équivalence*)

Une **relation d'équivalence** sur un ensemble X est une relation \mathcal{R} sur X qui est **réflexive**, **symétrique** et **transitive**. On note alors $(x \equiv y \text{ mod } \mathcal{R})$ ou bien $(x \approx y)$ pour $(x\mathcal{R}y)$.

Exemple 1.13.

(1) Soit X un ensemble non vide, alors l'égalité est toujours une **relation d'équivalence** sur X .

(2) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application :

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y) \quad (\text{est appelé } f\text{-égalité}).$$

(i) \mathcal{R} est **réflexive** :

$$\forall x \in X, \text{ on a : } f(x) = f(x) \implies \forall x \in X : x\mathcal{R}x.$$

(ii) \mathcal{R} est **symétrique** :

soient $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\iff f(x) = f(y) \\ &\implies f(y) = f(x) \\ &\implies y\mathcal{R}x. \end{aligned}$$

(iii) \mathcal{R} est **transitive** :

$$\text{soient } x, y, z \in X : \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) = f(y) \\ \text{et} \\ f(y) = f(z) \end{cases} \implies f(x) = f(z) \quad \text{donc } x\mathcal{R}z.$$

(3) Le parallélisme des droites d'un plan est une **relation d'équivalence**.

Définition 1.10. (Classes d'équivalences)

Soit \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur un ensemble X et $x \in X$, alors la classe de x notés $C(x)$ ou \bar{x} tel que :

$$\bar{x} = \{y \in X : x\mathcal{R}y\}.$$

Proposition 1.9.

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble X , alors les classes d'équivalence forment une partition de X i.e.,

(1) Toute classe d'équivalence est non vide.

(2) La réunion des classes est égale à X .

(3) Deux classes d'équivalences sont soit disjointes soit identiques.

Exemple 1.14.

D'après l'exemple 1.13. (2) on détermine la classe d'équivalence modulo \mathcal{R} :
soit $x \in X$,

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \{a \in X : x\mathcal{R}a\} \\ &= \{a \in X : f(a) = f(x)\} \\ &= f^{-1}(\{f(x)\}).\end{aligned}$$

Alors, $\forall x \in X, \bar{x} = f^{-1}(\{f(x)\})$.

i.e.,

$$\bar{x_0} = \{x_0, x_1, x_n\} = f^{-1}(\{f(x_0)\}).$$

Définition 1.11. (Ensemble quotient)

Soit X un ensemble non vide et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X .

L'ensemble **quotient** de X par \mathcal{R} est noté par X/\mathcal{R} : l'ensemble des classes d'équivalence sur X tel que :

$$X/\mathcal{R} = \{\bar{x} : x \in X\}.$$

Exemple 1.15.

Soit $X = \mathbb{R}$ et $(x, y) \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y \iff x^2 + x = y^2 + y$.

Cette relation est une relation d'équivalence.

Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}/\mathcal{R} &= \{\bar{x} : x \in X\}, \text{ tel que } \bar{x} = \{y \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : x^2 + x = y^2 + y\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 + x - y = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : (x + y)(x - y) + (x - y) = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : (x - y)[(x + y) + 1] = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y = x \text{ ou } y = -x - 1\} \\ &= \{\{x, -x - 1\} : x \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\{x, -x - 1\} : x \in \mathbb{R}\}.$$

1.6.2 Relations d'ordres

Définition 1.12. (*Relation d'ordre*)[17]

La relation \mathcal{R} dans X est dite une relation d'ordre si elle est **réflexive**, **antisymétrique** et **transitive**. La relation d'ordre noté généralement par \leq .

Un ensemble X muni d'une relation d'ordre est dit un ensemble ordonné, on note par (X, \leq) .

Exemple 1.16.

- (1) \leq, \geq sont des relations d'ordres sur \mathbb{R} .
- (2) La relation de divisibilité " $|$ " sur \mathbb{N}^* est une relation d'ordre et non une relation d'ordre sur \mathbb{Z}^* .
- (3) Les relations \subseteq et \supseteq sont des relations d'ordre sur $P(X)$.

Définition 1.13. (*Préordre*)

Soit \mathcal{R} une relation sur X . \mathcal{R} est dit un préordre sur X si elle est **réflexive** et **transitive**. N'est pas symétrique et n'est pas antisymétrique en général.

Exemple 1.17.

- (1) $(\mathbb{Z}^*, |)$ est un préordre.
- (2) Soit X un ensemble fini tel que $X = \{1, 2, 3\}$ et \mathcal{R} est la relation sur X donné par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Alors, \mathcal{R} est une relation préordre.

Définition 1.14. (*Ordre strict*)

Soit \mathcal{R} une relation sur X . \mathcal{R} est dit un ordre strict s'il est **irréflexive** et **transitive**. Un ensemble muni d'un ordre strict est dit un ensemble strictement ordonné, on note par $(X, <)$.

Exemple 1.18.

(1) Soit X un ensemble fini tel que $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et \mathcal{R} est la relation sur X donné par :

$$\mathcal{R} = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$$

Alors, \mathcal{R} est un ordre strict sur X .

(2) Dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ la relation " $<$ " est un ordre strict linéaire associé à " \leq ". Par contre, " \subset " est un ordre strict (non linéaire).

Définition 1.15. (Ordre total)[18]

Soit \mathcal{R} une relation d'ordre sur un ensemble X . On dit que \mathcal{R} est total (ou linéaire) si pour tous $x, y \in X$, alors $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Autrement dit, chaque deux éléments x et y sont comparables. Dans ce cas (X, \mathcal{R}) est dit une chaîne. Dans le cas contraire, on dit que \mathcal{R} est un ordre partiel.

Exemple 1.19.

* $(\mathbb{N}, |)$ n'est pas un ordre total.

1.6.3 Relation d'équivalence et relation d'ordre obtenues par une relation de préordre

Pour toute relation de préordre on peut associée une relation d'équivalence et une relation d'ordre.

Proposition 1.10.

Soit \mathcal{R} un préordre sur X , alors la relation $\approx = \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^t$ est une relation d'équivalence sur X .

Proposition 1.11.

Soit \mathcal{R} un préordre sur X , alors la relation \leq définie sur $X/\mathcal{R} = \{[x]_{\mathcal{R}} \mid x \in X\}$, tel que $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}$ par $[x]_{\mathcal{R}} \leq [y]_{\mathcal{R}}$ **si et seulement si** $x\mathcal{R}y$ est une relation d'ordre sur X/\mathcal{R} .

Chapitre 2

Relations ternaires et certaines classes particulières

Dans ce chapitre, on donne quelques notions et définitions concernant les relations ternaires, leurs interactions avec les opérations ensemblistes et les permutations, et leurs compositions avec des relations binaires. Ainsi que, certaines classes particulières des relations ternaires, telles que les relations d'équivalences ternaires et relations de betweennesses. Pour une discussion plus détaillée de ces concepts nous renvoyons le lecteur aux [2, 3, 4, 12, 13, 16, 20].

2.1 Définitions, exemples et représentation matricielle

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et exemples des relations ternaires pour les utiliser dans les sections suivantes.

Définition 2.1. (*Relation ternaire*)

Soient X , Y et Z trois ensembles. On appelle **relation ternaire** entre X , Y et Z toute partie de $X \times Y \times Z$.

Une **relation ternaire** \mathcal{T} sur un ensemble X est un sous-ensemble de X^3 .

Trois relations ternaires spéciales sur un ensemble X sont la relation vide \emptyset , la relation identité ternaire $I_{X^3} = \{(x, x, x) \mid x \in X\}$ et la relation ternaire universelle X^3 .

Exemple 2.1.

Soit \mathcal{T} une relation ternaire donnée par :

$$\mathcal{T} = \{(James\ Bond, 1988, Alsace), (Katherine\ Smith, 1991, Alsace), (Pablo, 1989, Beaujolais), \\ (Mika, 1989, Côtes\ du\ Rhône)\}.$$

Tel que

$$X(Noms) = \{James\ Bond, Mika, Robert\ Taylor, Pablo, susie\ Walsh, Anita\ Johnson, \\ Ben, Katherine\ Smith\},$$

$$Y(Années) = \{1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994\},$$

$$Z(Régions) = \{Alsace, Beaujolais, Côtes\ du\ Rhône\}.$$

On peut la représenter par le tableau :

<i>Nom</i>	<i>Année</i>	<i>Région</i>
<i>James Bond</i>	<i>1988</i>	<i>Alsace</i>
<i>Katherine Smith</i>	<i>1991</i>	<i>Alsace</i>
<i>Pablo</i>	<i>1989</i>	<i>Beaujolais</i>
<i>Mika</i>	<i>1989</i>	<i>Côtes du Rhône</i>

Représentation matricielle

Une relation ternaire \mathcal{T} sur un ensemble fini X de cardinalité n peut être représentée par une matrice cubique. Pour tous $x_i, x_j, x_k \in X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $1 \leq i, j, k \leq n$, $M_{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_{ijk})_{1 \leq i, j, k \leq n}$, tel que :

$$\mathcal{T}_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{Si } (x_i, x_j, x_k) \in \mathcal{T}, \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Exemple 2.2.

Soit \mathcal{T} est une relation ternaire sur $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ donnée par :

$$\mathcal{T} = \{(x_1, x_3, x_1), (x_1, x_4, x_2), (x_2, x_2, x_3), (x_2, x_4, x_1), (x_3, x_2, x_2), (x_3, x_3, x_4), \\ (x_3, x_4, x_4), (x_4, x_2, x_3), (x_4, x_3, x_4)\}.$$

La représentation matricielle de \mathcal{T} peut être écrite comme :

$$M_{\mathcal{T}} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Pour une relation \mathcal{T} sur un ensemble X , on note par \mathcal{T}^t de la transposée de \mathcal{T} , i.e.,

$$\mathcal{T}^t = \{(x, y, z) \in X^3 \mid (z, y, x) \in \mathcal{T}\}.$$

2.2 Opérations ensemblistes (set-operations) sur les relations ternaires

Soient \mathcal{T} et \mathcal{S} deux relations ternaires entre les ensembles X , Y et Z . On peut leur appliquer les opérations ensemblistes de, **l'inclusion**, **l'union**, **l'intersection** et **le complément**, pour construire des nouvelles relations ternaires.

1. L'inclusion

Soient \mathcal{T} , \mathcal{S} deux relations ternaires. On dit que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ si pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{T}$, alors $(x, y, z) \in \mathcal{S}$.

2. L'union et l'intersection

L'union de \mathcal{T} et \mathcal{S} est la relation $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$, définie par :

$$\mathcal{T} \cup \mathcal{S} = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z \mid (x, y, z) \in \mathcal{T} \text{ ou } (x, y, z) \in \mathcal{S}\}.$$

L'intersection de \mathcal{T} et \mathcal{S} est la relation $\mathcal{T} \cap \mathcal{S}$, définie par :

$$\mathcal{T} \cap \mathcal{S} = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z \mid (x, y, z) \in \mathcal{T} \text{ et } (x, y, z) \in \mathcal{S}\}.$$

Proposition 2.1. [20]

Pour toute relation ternaire \mathcal{T} et toute famille de relations ternaires $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ sur un ensemble X , on a les égalités suivantes.

$$(i) \quad (\mathcal{T}^t)^t = \mathcal{T};$$

$$(ii) \left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i \right)^t = \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i^t;$$

$$(iii) \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i \right)^t = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i^t.$$

3. Le complément

Soit \mathcal{T} une relation de $X \times Y \times Z$, on note \mathcal{T}^c la relation **complémentaire** de \mathcal{T} , i.e.,

$$\mathcal{T}^c = \{(x, y, z) \in X \times Y \times Z \mid (x, y, z) \notin \mathcal{T}\}.$$

Autrement dit : $\mathcal{T}^c = (X \times Y \times Z) - \mathcal{T}$.

Exemple 2.3.

Soit $X = \{x, y\}$, on définit la relation \mathcal{T} sur X par :

$$\mathcal{T} = \{(x, x, x), (y, y, x), (y, x, y)\}.$$

Donc,

$$\mathcal{T}^c = X^3 - \mathcal{T} = \{(x, x, y), (x, y, x), (y, x, x), (x, y, y), (y, y, y)\}.$$

Proposition 2.2.

Soient \mathcal{T}, \mathcal{S} deux relations ternaires. Alors :

$$(i) (\mathcal{T} \cap \mathcal{S})^c = \mathcal{T}^c \cup \mathcal{S}^c.$$

$$(ii) (\mathcal{T} \cup \mathcal{S})^c = \mathcal{T}^c \cap \mathcal{S}^c.$$

2.3 Relations ternaires obtenues par permutation

Dans cette section, on va discuter les relations ternaires associées à une relation \mathcal{T} obtenir par permutations.

Définition 2.2. [20]

Une permutation σ d'un ensemble X est une bijection de X . Pour un ensemble $X = \{x, y, z\}$, on écrit $\sigma(x, y, z)$ au lieu $(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$.

Les permutations possibles de $\{x, y, z\}$ sont énumérées comme :

$$\sigma_0(x, y, z) = (x, y, z), \quad \sigma_1(x, y, z) = (x, z, y), \quad \sigma_2(x, y, z) = (y, x, z),$$

$$\sigma_3(x, y, z) = (y, z, x), \quad \sigma_4(x, y, z) = (z, x, y), \quad \sigma_5(x, y, z) = (z, y, x).$$

Pour une relation ternaire \mathcal{T} sur X , nous définissons la relation ternaire \mathcal{T}^σ associée à \mathcal{T} comme :

$$\mathcal{T}^\sigma = \{\sigma(x, y, z) \in X^3 \mid (x, y, z) \in \mathcal{T}\}.$$

Il est clair que $\mathcal{T}^{\sigma_0} = \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}^{\sigma_5} = \mathcal{T}^t$.

Remarque 2.1.

Noté que

$$\mathcal{T}^\sigma = \{(x, y, z) \in X^3 \mid \sigma^{-1}(x, y, z) \in \mathcal{T}\},$$

tel que $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$ pour tout $i \in \{0, 1, 2, 5\}$ et $\sigma_3^{-1} = \sigma_4$.

Définition 2.3. [20]

Soit \mathcal{T} une relation ternaire sur un ensemble X . Nous définissons les relations associées à \mathcal{T} obtennent par permutations suivantes :

- (i) Converse droite de \mathcal{T} , comme $\mathcal{T}^\perp = \mathcal{T}^{\sigma_1}$;
- (ii) Converse gauche de \mathcal{T} , comme $\mathcal{T}^\vdash = \mathcal{T}^{\sigma_2}$;
- (iii) Rotation droite de \mathcal{T} , comme $\mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^{\sigma_3}$;
- (iv) Rotation gauche de \mathcal{T} , comme $\mathcal{T}^- = \mathcal{T}^{\sigma_4}$.

Remarque 2.2.

Pour toute famille des relations ternaires $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ sur un ensemble X , les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i \right)^{\sigma_j} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{T}_i^{\sigma_j} \text{ et } \left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i \right)^{\sigma_j} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i^{\sigma_j}, \text{ pour tout } j \in \{0, \dots, 5\}.$$

La proposition suivante est immédiate.

Proposition 2.3. [20]

Soit \mathcal{T} une relation ternaire sur un ensemble X . Le tableau de composition pour les permutations considérées se lisent comme suit : pour σ_i et σ_j , il énumère $(\mathcal{T}^{\sigma_i})^{\sigma_j}$.

$\sigma_i \backslash \sigma_j$	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5
σ_0	\mathcal{T}	\mathcal{T}^\perp	\mathcal{T}^\vdash	\mathcal{T}^+	\mathcal{T}^-	\mathcal{T}^t
σ_1	\mathcal{T}^\perp	\mathcal{T}	\mathcal{T}^+	\mathcal{T}^\vdash	\mathcal{T}^t	\mathcal{T}^-
σ_2	\mathcal{T}^\vdash	\mathcal{T}^-	\mathcal{T}	\mathcal{T}^t	\mathcal{T}^\perp	\mathcal{T}^+
σ_3	\mathcal{T}^+	\mathcal{T}^t	\mathcal{T}^-	\mathcal{T}^\perp	\mathcal{T}	\mathcal{T}^\vdash
σ_4	\mathcal{T}^-	\mathcal{T}^\vdash	\mathcal{T}^t	\mathcal{T}	\mathcal{T}^+	\mathcal{T}^\perp
σ_5	\mathcal{T}^t	\mathcal{T}^+	\mathcal{T}^-	\mathcal{T}^\perp	\mathcal{T}^\vdash	\mathcal{T}

2.4 Compositions des relations ternaires avec des relations binaires

Dans cette section, on va rappeler les compositions des relations ternaires avec des relations binaires. Pour une discussion plus détaillée de ces concepts nous renvoyons le lecteur à [20].

Définition 2.4.

Soit \mathcal{T} une relation ternaire et \mathcal{S} une relation binaire sur X .

- La \ltimes -composition de \mathcal{T} et \mathcal{S} est une relation ternaire $\mathcal{T} \ltimes \mathcal{S}$ sur X définie comme :

$$\mathcal{T} \ltimes \mathcal{S} = \{(x, y, z) \in X^3 \mid (\exists t \in X) ((x, y, t) \in \mathcal{T} \wedge (t, z) \in \mathcal{S})\};$$

- La \rtimes -composition de \mathcal{T} et \mathcal{S} est une relation ternaire $\mathcal{S} \rtimes \mathcal{T}$ sur X définie comme :

$$\mathcal{S} \rtimes \mathcal{T} = \{(x, y, z) \in X^3 \mid (\exists t \in X) ((x, t) \in \mathcal{S} \wedge (t, y, z) \in \mathcal{T})\}.$$

Exemple 2.4.

Soit $X = \{1, 2, 3\}$, on définit les relations \mathcal{T} et \mathcal{S} par :

$$\mathcal{T} = \{(1, 2, 3)\} \text{ et } \mathcal{S} = \{(3, 1)\}.$$

Donc,

$$\mathcal{T} \ltimes \mathcal{S} = \{(1, 2, 1)\} \text{ et } \mathcal{S} \rtimes \mathcal{T} = \{(3, 2, 3)\}.$$

2.5 Propriétés des relations ternaires

Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés fondamentales des relations ternaires définies sur le même ensemble X . Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [20].

2.5.1 Réflexivité, irréflexivité, fortement réflexivité et fortement irréflexivité

Soit \mathcal{T} une relation ternaire sur un ensemble X . \mathcal{T} est dite :

- **réflexive** : si pour tout $x \in X$, $(x, x, x) \in \mathcal{T}$;
- **fortement réflexive** : si pour tous $x, y, z \in X$ avec $\text{Card}\{x, y, z\} \leq 2$, $(x, y, z) \in \mathcal{T}$;
- **irréflexive** : si pour tout $x \in X$, $(x, x, x) \notin \mathcal{T}$;
- **fortement irréflexive** : si pour tous $x, y, z \in X$ avec $\text{Card}\{x, y, z\} \leq 2$, $(x, y, z) \notin \mathcal{T}$.

Exemple 2.5.

Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Le tableau suivant vérifie les réflexivités des relations suivantes :

$$\mathcal{T}_1 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 2, 1)\};$$

$$\mathcal{T}_2 = X \times X \times X; \quad \mathcal{T}_3 = \emptyset;$$

$$\mathcal{T}_4 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 2, 2), (2, 3, 1), (3, 3, 3)\};$$

$$\mathcal{T}_5 = \{(1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (1, 3, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 3),$$

$$(2, 3, 2), (2, 3, 3), (3, 1, 1), (3, 1, 3), (3, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 3, 1), (3, 3, 2)\}.$$

Relation	Réflexive	Irréflexive	Fortement réflexive	Fortement irréflexive
\mathcal{T}_1	×	×	×	✓
\mathcal{T}_2	✓	×	✓	×
\mathcal{T}_3	×	✓	×	✓
\mathcal{T}_4	✓	×	×	✓
\mathcal{T}_5	×	✓	✓	×

2.5.2 Symétrie, asymétrie, fortement symétrie et fortement asymétrie

La relation \mathcal{T} est dite :

- **symétrique** : si pour tous $x, y, z \in X$, $(x, y, z) \in \mathcal{T} \implies (z, y, x) \in \mathcal{T}$, i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{T}^t$;
- **σ_i -symétrique** avec $1 \leq i \leq 5$, si :

$$(x, y, z) \in \mathcal{T} \implies (x, y, z) \in \mathcal{T}^{\sigma_i}, \quad \text{i.e., } \mathcal{T} = \mathcal{T}^{\sigma_i}$$

- **fortement symétrique** si :

\mathcal{T} est σ_i -symétrique, pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$.

- **asymétrique** : si pour tous $x, y, z \in X$ tel que $\text{Card}\{x, y, z\} \geq 2$, $(x, y, z) \in \mathcal{T} \implies (z, y, x) \notin \mathcal{T}$.
- **σ_i -asymétrique** : si pour tous $x, y, z \in X$ tel que $\text{Card}\{x, y, z\} \geq 2$

$$(x, y, z) \in \mathcal{T} \implies \sigma_i(x, y, z) \notin \mathcal{T}, \quad 1 \leq i \leq 5.$$

- **fortement asymétrique** : si pour tous $x, y, z \in X$ tel que $\text{Card}\{x, y, z\} \geq 2$

\mathcal{T} est σ_i -asymétrique, pour tout $i \in \{1, \dots, 5\}$.

Exemple 2.6.

Pour les relations donnaient dans l'exemple 2.5 on obtient les résultats suivants :

Relation	Symétrique	Asymétrique	Fortement symétrique	Fortement Asymétrique
\mathcal{T}_1	×	×	×	×
\mathcal{T}_2	×	×	✓	×
\mathcal{T}_3	✓	✓	✓	✓
\mathcal{T}_4	×	✓	×	×
\mathcal{T}_5	×	×	×	×

2.5.3 Cyclicité

La relation \mathcal{T} est dite :

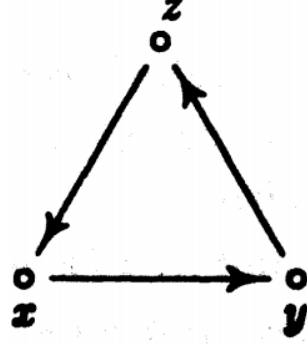
- **cyclique** : si pour tous $x, y, z \in X$, $(x, y, z) \in \mathcal{T} \implies (y, z, x) \in \mathcal{T}$, i.e., $\mathcal{T} = \mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^-$.

Exemple 2.7.

Soit X un ensemble fini tel que $X = \{x, y, z\}$ et \mathcal{T} est la relation sur X donnée par :

$$\mathcal{T} = \{(x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)\}.$$

Le fait que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^+ = \mathcal{T}^-$ implique que \mathcal{T} est cyclique.

**2.5.4 Complète et fortement complète**

La relation \mathcal{T} est dite :

- **complète** : si pour tous $x, y, z \in X$ tel que $\text{Card}\{x, y, z\} \geq 2$, $(x, y, z) \in \mathcal{T} \vee (z, y, x) \in \mathcal{T}$;
- **σ_i -complète** : si pour tous $x, y, z \in X$ tel que $\text{Card}\{x, y, z\} \geq 2$

$$(x, y, z) \in \mathcal{T} \vee (x, y, z) \in \mathcal{T}^{\sigma_i}, \quad 0 \leq i \leq 5.$$

- **fortement complète** : si pour tous $x, y, z \in X$ tel que $\text{Card}\{x, y, z\} \geq 2$

$$\mathcal{T} \text{ est } \sigma_i\text{-complète, pour tout } i \in \{0, \dots, 5\}.$$

Exemple 2.8.

Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Le tableau suivant vérifie quelles sont les relations complètes et fortement complètes parmi les relations suivantes :

$$\mathcal{T}_1 = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\};$$

$$\mathcal{T}_2 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\};$$

$$\mathcal{T}_3 = X \times X \times X; \quad \mathcal{T}_4 = \emptyset;$$

$$\mathcal{T}_5 = \{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 2, 2), (3, 2, 1), (3, 3, 3)\}.$$

Propriété	\mathcal{T}_1	\mathcal{T}_2	\mathcal{T}_3	\mathcal{T}_4	\mathcal{T}_5
Complète	✓	✓	✓	×	✓
Fortement complète	✓	✓	✓	×	×

2.5.5 c_i -transitivité

La relation \mathcal{T} est dite :

- **c_1 -transitive** : si pour tous $x, y, z, s, t \in X$, $(x, y, t) \in \mathcal{T} \wedge (s, t, z) \in \mathcal{T} \implies (x, y, z) \in \mathcal{T}$;
- **c_2 -transitive** : si pour tous $x, y, z, s, t \in X$, $(x, y, s) \in \mathcal{T} \wedge (s, t, z) \in \mathcal{T} \implies (x, t, z) \in \mathcal{T}$;
- **c_3 -transitive** : si pour tous $x, y, z, s, t \in X$, $(x, y, s) \in \mathcal{T} \wedge (s, t, z) \in \mathcal{T} \implies (x, y, z) \in \mathcal{T}$;
- **c_4 -transitive** : si pour tous $x, y, z, s, t \in X$, $(x, y, s) \in \mathcal{T} \wedge (s, t, z) \in \mathcal{T} \implies (x, y, t) \in \mathcal{T}$;
- **c_5 -transitive** : si pour tous $x, y, z, s, t \in X$, $(x, y, s) \in \mathcal{T} \wedge (s, t, z) \in \mathcal{T} \implies (y, t, z) \in \mathcal{T}$;
- **c_6 -transitive** : si pour tous $x, y, z, s, t \in X$, $(x, s, t) \in \mathcal{T} \wedge (s, y, z) \in \mathcal{T} \implies (x, y, z) \in \mathcal{T}$;
- **transitive** : si c_i -transitive, pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$.

Exemple 2.9.

Soit $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^3$. Le tableau suivant vérifie les c_i -transitivité ($1 \leq i \leq 6$) des relations ternaires sur X suivantes :

1. $(x, y, z) \in \mathcal{T}_1 \iff |x| = |y| = |z|$;
2. $(x, y, z) \in \mathcal{T}_2 \iff |x| = |z|$;
3. $(x, y, z) \in \mathcal{T}_3 \iff |x| = |y|$;
4. $(x, y, z) \in \mathcal{T}_4 \iff |y| = |z|$.

Relation	c_1 -transitive	c_2 -transitive	c_3 -transitive	c_4 -transitive	c_5 -transitive	c_6 -transitive
\mathcal{T}_1	✓	✓	✓	✓	✓	✓
\mathcal{T}_2	×	×	✓	×	×	×
\mathcal{T}_3	×	×	×	×	×	✓
\mathcal{T}_4	✓	×	×	×	×	×

Pour plus de détails, voir l'exemple 2.10.

Proposition 2.4. [20]

Soit \mathcal{T} une relation ternaire sur un ensemble X . On a les équivalences suivantes :

- (i) \mathcal{T} est c_1 -transitive **si et seulement si** \mathcal{T}^t est c_6 -transitive ;
- (ii) \mathcal{T} est c_3 -transitive **si et seulement si** \mathcal{T}^t est c_2 -transitive ;
- (iii) \mathcal{T} est c_5 -transitive **si et seulement si** \mathcal{T}^t est c_4 -transitive.

Démonstration :

- (i) On montre seulement la première équivalence, les autres équivalences sont analogues. On suppose que \mathcal{T} est c_1 -transitive.

Soit $(x, s, t) \in \mathcal{T}^t$ et $(s, y, z) \in \mathcal{T}^t$. Alors $(t, s, x) \in \mathcal{T}$ et $(z, y, s) \in \mathcal{T}$. Le fait que \mathcal{T} est c_1 -transitive, implique que $(z, y, x) \in \mathcal{T}$. Par conséquent, $(x, y, z) \in \mathcal{T}^t$. Ainsi, \mathcal{T}^t est c_6 -transitive. L'inverse est similaire.

Proposition 2.5.

Soit \mathcal{T} une relation ternaire sur un ensemble X . On a les équivalences suivantes :

- (i) \mathcal{T} est **réflexive** si et seulement si \mathcal{T}^c est **irréflexive** ;
- (ii) \mathcal{T} est **fortement réflexive** si et seulement si \mathcal{T}^c est **fortement irréflexive** ;
- (iii) \mathcal{T} est **symétrique** si et seulement si \mathcal{T}^c est **symétrique** ;
- (iv) \mathcal{T} est **fortement symétrique** si et seulement si \mathcal{T}^c est **fortement symétrique** ;
- (v) \mathcal{T} est **asymétrique** si et seulement si \mathcal{T}^c est **complète** ;
- (vi) \mathcal{T} est **fortement asymétrique** si et seulement si \mathcal{T}^c est **fortement complète** ;
- (vii) \mathcal{T} est **cyclique** si et seulement si \mathcal{T}^c est **cyclique**.

Démonstration :

- (i) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \text{ est réflexive} &\iff (x, x, x) \in \mathcal{T} \\
&\iff (x, x, x) \notin \mathcal{T}^c \\
&\iff \mathcal{T}^c \text{ est irréflexive.}
\end{aligned}$$

La preuve d'équivalence de (ii) est similaire.

(vii) \Leftarrow) Supposons que \mathcal{T}^c est symétrique, et montrons que \mathcal{T} est symétrique.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \mathcal{T} &\implies (x, y, z) \notin \mathcal{T}^c \\ &\implies (z, y, x) \notin \mathcal{T}^c \\ &\implies (z, y, x) \in \mathcal{T}.\end{aligned}$$

Alors \mathcal{T} est symétrique.

\Rightarrow) L'inverse est analogue.

Les preuves des équivalences (iv) et (vii) sont similaires.

(v) \Rightarrow) Supposons que \mathcal{T}^c n'est pas complète.

$$\begin{aligned}(x, y, z) \notin \mathcal{T}^c \wedge (z, y, x) \notin \mathcal{T}^c &\implies (x, y, z) \in \mathcal{T} \wedge (z, y, x) \in \mathcal{T} \\ &\implies (z, y, x) \notin \mathcal{T} \wedge (z, y, x) \in \mathcal{T} \quad (\text{contradiction}).\end{aligned}$$

Alors \mathcal{T}^c est complète.

\Leftarrow) Supposons que \mathcal{T} est complète on a

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \mathcal{T} &\implies (x, y, z) \notin \mathcal{T}^c \\ &\implies (z, y, x) \in \mathcal{T}^c \\ &\implies (z, y, x) \notin \mathcal{T}.\end{aligned}$$

Donc, \mathcal{T} est asymétrique.

2.6 Projections binaires d'une relation ternaire

Dans cette section, nous rappelons la définition et certaines propriétés des projections binaires d'une relation ternaire. Plus d'informations peuvent être trouvées dans [20].

Définition 2.5. [20]

Soit \mathcal{T} une relation ternaire sur un ensemble X .

- La projection gauche de \mathcal{T} est la relation binaire $\mathcal{P}_g(\mathcal{T})$ sur X définie comme :

$$\mathcal{P}_g(\mathcal{T}) = \{(x, y) \in X^2 \mid (\exists z \in X)((z, x, y) \in \mathcal{T})\};$$

- La projection centrale de \mathcal{T} est la relation binaire $\mathcal{P}_c(\mathcal{T})$ sur X définie comme :

$$\mathcal{P}_c(\mathcal{T}) = \{(x, y) \in X^2 \mid (\exists z \in X)((x, z, y) \in \mathcal{T})\};$$

- La projection droite de \mathcal{T} est la relation binaire $\mathcal{P}_d(\mathcal{T})$ sur X définie comme :

$$\mathcal{P}_d(\mathcal{T}) = \{(x, y) \in X^2 \mid (\exists z \in X)((x, y, z) \in \mathcal{T})\}.$$

Pour une relation ternaire \mathcal{T} , on écrit $\mathcal{P}(\mathcal{T}) = \mathcal{P}_g(\mathcal{T}) \cup \mathcal{P}_c(\mathcal{T}) \cup \mathcal{P}_d(\mathcal{T})$.

La proposition suivante montre l'interaction des projections avec l'inclusion, l'intersection et l'union.

Proposition 2.6. [20]

Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux relations ternaires sur un ensemble X . Pour tout $\lambda \in \{g, c, d\}$, les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, alors $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T}_1) \subseteq \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T}_2)$;
- (ii) $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2) \subseteq \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T}_1) \cap \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T}_2)$;
- (iii) $\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T}_1) \cup \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T}_2)$.

Démonstration :

On montre (i) pour $\lambda = g$, car les autres cas prouvent de manière similaire.

(i) Supposons que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ et soit $(x, y) \in \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_1)$. Alors il existe $z \in X$ tel que $(z, x, y) \in \mathcal{T}_1$. Cela implique que $(z, x, y) \in \mathcal{T}_2$. Donc, $(x, y) \in \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_2)$. Ainsi, $\mathcal{P}_g(\mathcal{T}_1) \subseteq \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_2)$.

(ii) Soit $(x, y) \in \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2)$. Alors il existe $z \in X$ tel que $(z, x, y) \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$. Cela implique que $(z, x, y) \in \mathcal{T}_1$ et $(z, x, y) \in \mathcal{T}_2$. Donc, $(x, y) \in \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_1) \cap \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_2)$.

Ainsi, $\mathcal{P}_g(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2) \subseteq \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_1) \cap \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_2)$.

(iii) Nous vérifions facilement que :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) &= \{(x, y) \in X^2 \mid (\exists z \in X)((z, x, y) \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2)\} \\ &= \{(x, y) \in X^2 \mid (\exists z \in X)((z, x, y) \in \mathcal{T}_1 \vee (z, x, y) \in \mathcal{T}_2)\} \\ &= \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_1) \cup \mathcal{P}_g(\mathcal{T}_2). \end{aligned}$$

D'une manière similaire on obtient :

Proposition 2.7.

Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 deux relations ternaires sur un ensemble X . les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, alors $\mathcal{P}(\mathcal{T}_1) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{T}_2)$;
- (ii) $\mathcal{P}(\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{T}_1) \cap \mathcal{P}(\mathcal{T}_2)$;
- (iii) $\mathcal{P}(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \mathcal{P}(\mathcal{T}_1) \cup \mathcal{P}(\mathcal{T}_2)$.

2.7 Extensions cylindriques d'une relation binaire

Dans cette section, nous étudions les extensions cylindriques gauche, centrale et droite d'une relation binaire. Premièrement, nous rappelons la définition des extensions cylindriques d'une relation binaire. Pour plus de détails, nous nous référons à [20].

Définition 2.6. [20]

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble X .

- L'extension cylindrique gauche de \mathcal{R} est la relation ternaire $\mathcal{C}_g(\mathcal{R})$ sur X définie comme :

$$\mathcal{C}_g(\mathcal{R}) = \{(x, y, z) \in X^3 \mid (y, z) \in \mathcal{R}\};$$

- L'extension cylindrique centrale de \mathcal{R} est la relation ternaire $\mathcal{C}_c(\mathcal{R})$ sur X définie comme :

$$\mathcal{C}_c(\mathcal{R}) = \{(x, y, z) \in X^3 \mid (x, z) \in \mathcal{R}\};$$

- L'extension cylindrique droite de \mathcal{R} est la relation ternaire $\mathcal{C}_d(\mathcal{R})$ sur X définie comme :

$$\mathcal{C}_d(\mathcal{R}) = \{(x, y, z) \in X^3 \mid (x, y) \in \mathcal{R}\}.$$

La proposition suivante montre l'interaction des extensions cylindriques avec l'inclusion, l'intersection et l'union.

Proposition 2.8. [20]

Soient \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 deux relations binaires sur un ensemble X . Pour tout $\lambda \in \{g, c, d\}$, les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) Si $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$, alors $\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}_1) \subseteq \mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}_2)$;

$$(ii) \mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) = \mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}_1) \cap \mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}_2);$$

$$(iii) \mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) = \mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}_1) \cup \mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}_2).$$

Démonstration :

on montre cette proposition pour $\lambda = g$, car les autres cas sont prouvés de manière similaire.

(i) Supposons que $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$. Soit $(x, y, z) \in \mathcal{C}_g(\mathcal{R}_1)$, alors $(y, z) \in \mathcal{R}_1$. Le fait que $\mathcal{R}_1 \subseteq \mathcal{R}_2$. Donc, $(y, z) \in \mathcal{R}_2$. Ainsi, $(x, y, z) \in \mathcal{C}_g(\mathcal{R}_2)$.

(ii) Nous vérifions facilement que :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_g(\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2) &= \{(x, y, z) \in X^3 \mid (y, z) \in \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2\} \\ &= \{(x, y, z) \in X^3 \mid (y, z) \in \mathcal{R}_1 \wedge (y, z) \in \mathcal{R}_2\} \\ &= \{(x, y, z) \in X^3 \mid (x, y, z) \in \mathcal{C}_g(\mathcal{R}_1) \wedge (x, y, z) \in \mathcal{C}_g(\mathcal{R}_2)\} \\ &= \mathcal{C}_g(\mathcal{R}_1) \cap \mathcal{C}_g(\mathcal{R}_2). \end{aligned}$$

(iii) La preuve est fait de la même façon que (ii).

Proposition 2.9. [20]

Soit \mathcal{T} une relation ternaire et \mathcal{R} une relation binaire sur un ensemble X . Pour tout $\lambda \in \{g, c, d\}$, les assertions suivantes sont vérifiées :

$$(i) \mathcal{R} = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{C}_\lambda(\mathcal{R}));$$

$$(ii) \mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}_\lambda(\mathcal{P}_\lambda(\mathcal{T})).$$

Démonstration :

on montre cette proposition pour $\lambda = g$, car les autres cas prouvent de manière similaire.

(i) On vérifie facilement que :

$$\mathcal{P}_g(\mathcal{C}_g(\mathcal{R})) = \{(x, y) \in X^2 \mid (\exists z \in X)((z, x, y) \in \mathcal{C}_g(\mathcal{R}))\} = \mathcal{R}.$$

(ii) Soit $(x, y, z) \in \mathcal{T}$, alors $(y, z) \in \mathcal{P}_g(\mathcal{T})$. D'où, $(x, y, z) \in \mathcal{C}_g(\mathcal{P}_g(\mathcal{T}))$.

Ainsi, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}_g(\mathcal{P}_g(\mathcal{T}))$.

Remarque 2.3.

L'exemple suivant montre que dans la proposition 2.9 (ii), l'égalité ne tient pas en général.

En effet, soit \mathcal{T} une relation ternaire sur $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ donné par :

$$\mathcal{T} = \{(x_1, x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3)\}.$$

Il tient que

$$\mathcal{P}_g(\mathcal{T}) = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\}.$$

Et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_g(\mathcal{P}_g(\mathcal{T})) = & \{(x_1, x_1, x_2), (x_2, x_1, x_2), (x_3, x_1, x_2), (x_4, x_1, x_2), \\ & (x_1, x_2, x_3), (x_2, x_2, x_3), (x_3, x_2, x_3), (x_4, x_2, x_3)\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $\mathcal{C}_g(\mathcal{P}_g(\mathcal{T})) \not\subseteq \mathcal{T}$.

2.8 Nombre des relations ternaires sur des ensembles finis

Considérons trois ensembles finis X , Y et Z de cardinal n , m et k respectivement. Le fait qu'une relation ternaire \mathcal{T} est une partie de $X \times Y \times Z$, i.e., $\mathcal{T} \in P(X \times Y \times Z)$ implique que le nombre des relations ternaires sur $X \times Y \times Z$ est 2^{nmk} .

En particulier, si $X = Y = Z$, on trouve 2^{n^3} relations ternaires sur X .

Aussi, comme le cas binaire, on obtient :

- (i) 2^{n^3-n} relations réflexives ;
- (ii) $2^{(n^3+n)/2}$ relations symétriques ;
- (iii) $2^{(n^3-n)/2}$ relations réflexives et symétriques ;
- (iv) Pour le nombre de relations transitives , on n'a pas une formule fermée.

Démonstration :

$$(i) \quad X \longrightarrow \mathcal{T} \subseteq X^3.$$

$$\mathcal{T} \text{ réflexive} \iff I_{X^3} = \{(x, x, x) \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{T}.$$

$$\mathcal{T} = I_{X^3} \cup A, \quad A \subseteq (X^3 \setminus I_{X^3}), \quad |X| = n, \quad |X^3| = n^3, \quad |I_{X^3}| = n, \quad |(X^3 \setminus I_{X^3})| = n^3 - n.$$

$$|P(X^3 \setminus I_{X^3})| = 2^{n^3-n}.$$

(ii) et (iii) on utilise la même manière que le cas binaire, puisque la symétrie des relations ternaires employée deux éléments seulement.

2.9 Classes particulières des relations ternaires

Dans cette section, nous présenterons des classes particulières des relations ternaires inspirées du cas binaire.

2.9.1 Relations d'équivalences ternaires

Définition 2.7. (*Relation ternaire $\sigma_j - c_i$ -équivalence*)

Une **relation ternaire $\sigma_j - c_i$ -équivalence** sur un ensemble X est une relation \mathcal{T} sur X qui est **réflexive**, **σ_j -symétrique** et **c_i -transitive** pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$ et $j \in \{0, \dots, 5\}$.

Exemple 2.10.

Soit $X = \mathbb{R}$ et \mathcal{T} est la relation sur X tel que $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{R}^3$ donné par :

$$(1) \quad (x, y, z) \in \mathcal{T}_1 \iff |x| = |y| = |z|$$

(i) \mathcal{T}_1 est **réflexive** :

$$\forall x \in X, \quad \text{on a : } |x| = |x| = |x| \implies \forall x \in X : (x, x, x) \in \mathcal{T}_1.$$

(ii) \mathcal{T}_1 est **symétrique** :

soient $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{T}_1 &\iff |x| = |y| = |z| \\ &\implies |z| = |y| = |x| \\ &\implies (z, y, x) \in \mathcal{T}_1. \end{aligned}$$

(iii) \mathcal{T}_1 est **c_i -transitive**, pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$. En effet,

$$\begin{aligned} \text{soient } x, y, z, s, t \in X : \quad &\left\{ \begin{array}{l} (x, y, t) \in \mathcal{T}_1 \\ \text{et} \\ (s, t, z) \in \mathcal{T}_1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} |x| = |y| = |t| \\ \text{et} \\ |s| = |t| = |z| \end{array} \right. \\ &\implies |x| = |y| = |z| \quad \text{donc} \quad (x, y, z) \in \mathcal{T}_1. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{T}_1 est **c_1 -équivalence**. De même manière on démontre \mathcal{T}_1 est **c_i -transitive**, pour tout $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$(2) \quad (x, y, z) \in \mathcal{T}_2 \iff |x| = |z|$$

(i) \mathcal{T}_2 est **réflexive** :

$$\forall x \in X, \text{ on a : } |x| = |x| \implies \forall x \in X : (x, y, x) \in \mathcal{T}_2 \quad \forall y \implies (x, x, x) \in \mathcal{T}_2.$$

(ii) \mathcal{T}_2 est **symétrique** :

soient $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{T}_2 &\iff |x| = |z| \\ &\implies |z| = |x| \\ &\implies (z, y, x) \in \mathcal{T}_2. \end{aligned}$$

(iii) \mathcal{T}_2 est **c_3 -transitive** :

$$\begin{aligned} \text{soient } x, y, z, s, t \in X : & \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, y, s) \in \mathcal{T}_2 \\ \text{et} \\ (s, t, z) \in \mathcal{T}_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} |x| = |s| \\ \text{et} \\ |s| = |z| \end{array} \right. \implies |x| = |z| \\ \text{donc } & \quad (x, y, z) \in \mathcal{T}_2. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{T}_2 est **c_3 -équivalence**.

$$(3) \quad (x, y, z) \in \mathcal{T}_3 \iff |x| = |y|$$

(i) \mathcal{T}_3 est **réflexive** :

$$\forall x \in X, \text{ on a : } |x| = |x| \implies \forall x \in X : (x, x, z) \in \mathcal{T}_3 \quad \forall z \implies (x, x, x) \in \mathcal{T}_3.$$

(ii) \mathcal{T}_3 est **σ_2 -symétrique** :

soient $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{T}_3 &\iff |x| = |y| \\ &\implies |y| = |x| \\ &\implies (y, x, z) \in \mathcal{T}_3. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{T}_3 est **σ_2 -symétrique**.

(iii) \mathcal{T}_3 est **c_6 -transitive** :

$$\begin{aligned} \text{soient } x, y, z, s, t \in X : & \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, s, t) \in \mathcal{T}_3 \\ \text{et} \\ (s, y, z) \in \mathcal{T}_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} |x| = |s| \\ \text{et} \\ |s| = |y| \end{array} \right. \implies |x| = |y| \\ \text{donc } & \quad (x, y, z) \in \mathcal{T}_3. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{T}_3 est σ_2 - c_6 -équivalence.

$$(4) \quad (x, y, z) \in \mathcal{T}_4 \iff |y| = |z|$$

(i) \mathcal{T}_4 est **réflexive** :

$$\forall y \in X, \text{ on a : } |y| = |y| \implies \forall y \in X : (x, y, y) \in \mathcal{T}_4 \quad \forall x \implies (y, y, y) \in \mathcal{T}_4.$$

(ii) \mathcal{T}_4 est σ_1 -**symétrique** :

soient $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{T}_4 &\iff |y| = |z| \\ &\implies |z| = |y| \\ &\implies (x, z, y) \in \mathcal{T}_4. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{T}_4 est σ_1 -**symétrique**.

(iii) \mathcal{T}_4 est c_1 -**transitive** :

$$\begin{aligned} \text{soient } x, y, z, s, t \in X : &\left\{ \begin{array}{l} (x, y, t) \in \mathcal{T}_4 \\ \text{et} \\ (s, t, z) \in \mathcal{T}_4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} |y| = |t| \\ \text{et} \\ |t| = |z| \end{array} \right. \implies |y| = |z| \\ \text{donc } &(x, y, z) \in \mathcal{T}_4. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{T}_4 est σ_1 - c_1 -équivalence.

2.9.2 Relations de betweenness

Dans cette sous-section , nous rappelons la classe de Betweennesses comme une classe particulière des relations ternaires. Pour une discussion plus détaillée de ces concepts nous renvoyons le lecteur à [16].

Définition 2.8. (*Relation betweenness*)[16]

Une relation ternaire \mathcal{B} sur un ensemble X est dite une relation betweenness si elle satisfait les trois propriétés suivantes :

- *Symétrique dans le dernier point* : pour tout $x, y, z \in X$,

$$(x, y, z) \in \mathcal{B} \iff (z, y, x) \in \mathcal{B}.$$

- *Fermeture* : pour tout $x, y, z \in X$,

$$((x, y, z) \in \mathcal{B} \wedge (x, z, y) \in \mathcal{B}) \iff y = z.$$

- *End-point transitive* : pour tout $x, y, z, t \in X$,

$$((x, y, t) \in \mathcal{B} \wedge (x, t, z) \in \mathcal{B}) \implies (x, y, z) \in \mathcal{B}.$$

Remarque 2.4.

Évidemment, l'axiome de fermeture pour la relation betweenness est équivalent aux deux conditions suivantes :

(a) *Réflexivité* (w.r.t. (with respect to) le deuxième et le troisième élément) :

$$\text{pour tout } x, y \in X, \quad (x, y, y) \in \mathcal{B}.$$

(b) *Antisymétrique* (w.r.t. le deuxième et le troisième élément) : pour tout $x, y, z \in X$,

$$((x, y, z) \in \mathcal{B} \wedge (x, z, y) \in \mathcal{B}) \implies y = z.$$

Nous rappelons que la plus petite relation de betweenness sur un ensemble X est donnée par :

$$\mathcal{B}_0 = \{(x, y, z) \in X^3 \mid (x = y) \vee (y = z)\}, \text{ i.e., } \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}, \text{ pour toute relation betweenness } \mathcal{B}.$$

Définition 2.9. (Ordre-Betweenness) :

Une relation de betweenness plus significative est induite par une relation d'ordre \leq sur X , comme :

$$\mathcal{B}_{\leq} = \mathcal{B}_0 \cup \{(x, y, z) \in X^3 \mid (x < y < z) \vee (z < y < x)\}.$$

Exemple 2.11.

Soit X un ensemble non vide et \leq une relation d'ordre sur X . Soit la relation ternaire \mathcal{B} sur X définit par :

$$(x, y, z) \in \mathcal{B} \iff x \leq y \leq z.$$

Alors \mathcal{B} est une relation de betweenness. En effet :

(i) \mathcal{B} est **symétrique** :

soient $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{B} &\iff x \leq y \leq z \\ &\implies z \leq y \leq x \\ &\implies (z, y, x) \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

(ii) \mathcal{B} est **fermeture** :

soient $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \mathcal{B} \wedge (x, z, y) \in \mathcal{B} &\iff x \leq y \leq z \wedge x \leq z \leq y \\ &\iff y = z. \end{aligned}$$

(iii) \mathcal{B} est **transitive** :

$$\text{soient } x, y, z, t \in X : \left\{ \begin{array}{l} (x, y, t) \in \mathcal{B} \\ \text{et} \\ (x, t, z) \in \mathcal{B} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq y \leq t \\ \text{et} \\ x \leq t \leq z \end{array} \right. \Rightarrow x \leq y \leq z \Rightarrow (x, y, z) \in \mathcal{B}.$$

Donc \mathcal{B} est une relation de **betweenness**.

Annexe : Exemples d'applications des relations ternaires dans la base de données

Dans cette annexe, nous donnons quelques exemples d'applications des relations ternaires. En particulier, dans le domaine de la base de données. Nous verrons comment appliquer et transformer des relations ternaires et quelle est l'importance de transformer les relations ternaires en relations binaires.

Exemple 2.12.

La figure 2.1 représentant la relation réflexive entre une personne et lui-même :

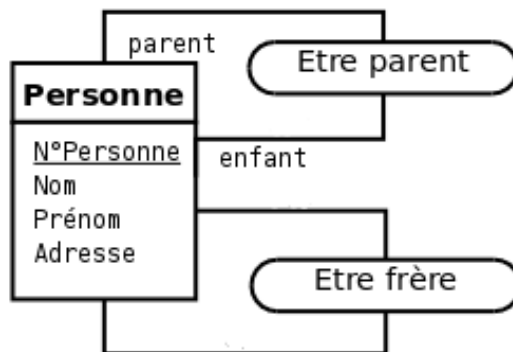


FIGURE 2.1 – Exemple d'associations réflexives sur le type entité personne. Le premier type association permet de modéliser la relation parent/ enfant et le deuxième type association la relation de fraternité.

Définition 2.10.

Type association réflexive : un type association est qualifié de réflexive quand il matérialise une relation entre un type entité et lui-même (cf. Figure 2.1)

Exemple 2.13.

La figure 2.2 représentant la relation binaire entre une personne et livre et la relation est une relation d'emprunter. Mais la figure 2.3 : est une relation binaire entre trois types entité.

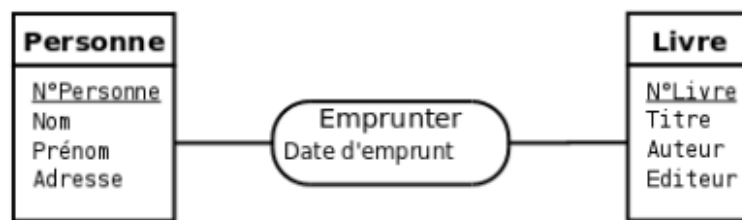


FIGURE 2.2 – Représentation graphique d'un exemple de type association liant deux types entité.

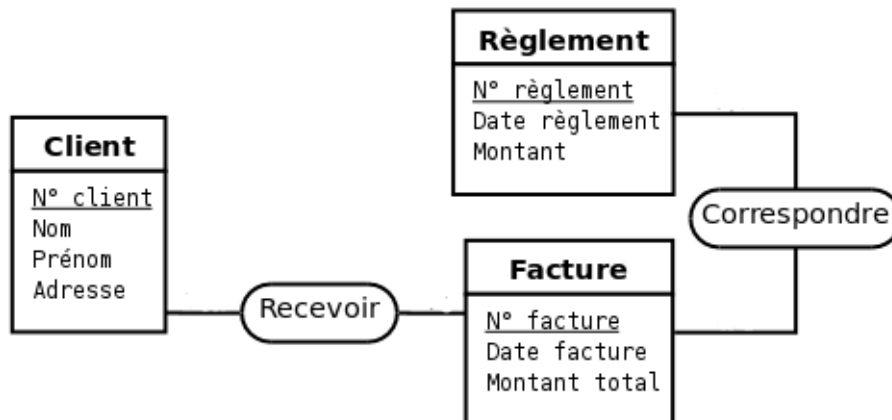


FIGURE 2.3 – Exemple de type association binaire entre des types entité Client, Facture et Règlement.

Exemple 2.14.

La figure 2.4 représentant la relation ternaire entre un créneau, salle et film la relation est une relation de projeter. Mais la figure 2.5 est une transformation du type association ternaire de la figure 2.4 en un type entité et trois types association binaires.

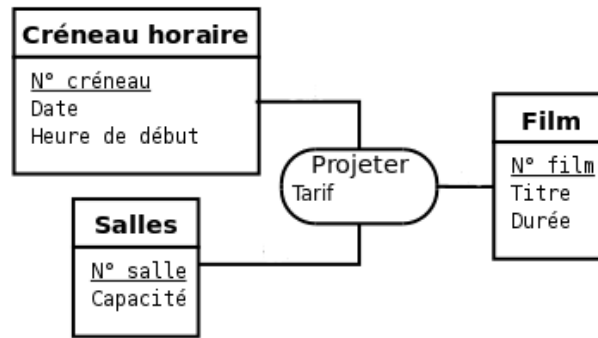


FIGURE 2.4 – Exemple de type association ternaire entre des types entité Créneau horaire, Salle et Film.

La figure 2.4 nous montre un exemple de type association ternaire entre les types entité Créneau horaire, Salle et Film. Il est toujours possible de s'affranchir d'un type association ternaire en se ramenant à des types association binaire de la manière suivante :

- On remplace le type association ternaire par un type entité et on lui attribue un identifiant.
- On crée des types association binaire entre le nouveau type entité et tous les types entité de la collection de anciens types association ternaire.

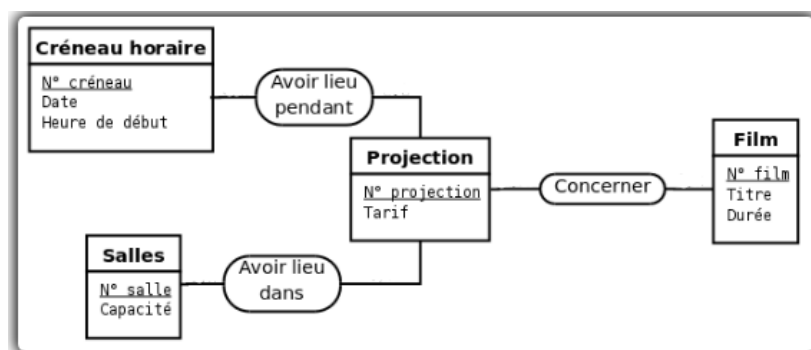


FIGURE 2.5 – Transformation du type association ternaire de la figure 2.4 en un type entité et trois types association binaires.

La figure 2.5 illustre le résultat de cette transformation sur le schéma de la figure 2.4.

L'avantage du schéma de la figure 2.5 est de rendre plus intelligible la lecture des cardinalités. Il ne faut surtout pas le voir comme un aboutissement. Ainsi, le mécanisme, que nous venons de détailler ci-dessus, de passage d'un type association ternaire à un type entité et trois types association binaire.

Exemple 2.15.

On donne un autre exemple sur les relation ternaire telle que, la figure 2.6 représentant la relation ternaire entre un avion, trajet et pilote la relation est une relation de vol. Mais la figure 2.7 est une transformation du type association ternaire de la figure 2.6 en un type entité et trois types association binaires.

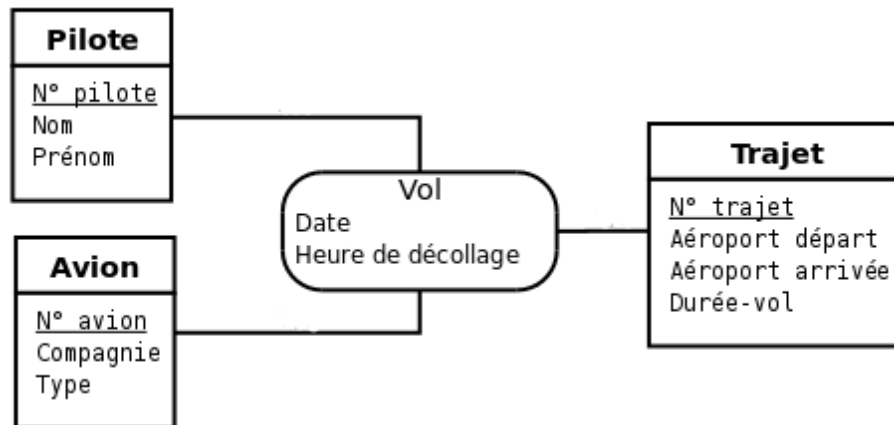


FIGURE 2.6 – Modèle représentant un type association ternaire Vol liant trois type entité Avion, Trajet et Pilote.

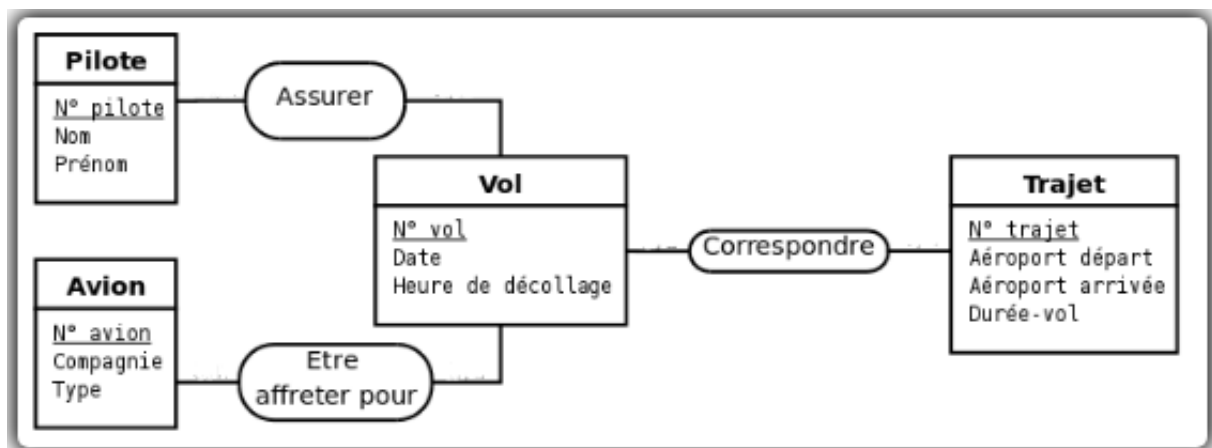


FIGURE 2.7 – Transformation du type association ternaire de la figure 2.6 en un type entité et trois types association binaires.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques propriétés des relations ternaires. En particulier, nous avons porté notre attention sur les propriétés similaires ou analogues aux propriétés des relations binaires.

De plus, nous avons discuté certaines classes particulières de relations ternaires, telles que les relations d'équivalences ternaires et les relations de betweennesses.

Bibliographie

- [1] N. Caspard, B. Leclerc, B. Monjardet, Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, 2007.
- [2] I. Chajda, V. Novák, *On extensions of cyclic orders*, Časopis Pro Pěstování Matematiky 110 (1985), 116-121.
- [3] I. Cristea, M. Ştefănescu, *Hypergroups and n -ary relations*, European Journal of Combinatorics 31 (2010), 780–789.
- [4] I. Cristea, *Several aspects on the hypergroups associated with n -ary relations*, An. St. Univ. Ovidius Constanta 17 (2009), 99–110.
- [5] S. Crozat, *Algèbre relationnelle*, Contributions : Dritan Nace, 2018.
- [6] B. Deschamps, Cours Théorie des ensembles, *Saint-Etienne*, 2002-2003.
- [7] L. Frécon, Eléments de mathématiques discrètes, *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, 2002.
- [8] C. Guyeux, F. Couchot, *Mathématiques pour l'Informatique*, Université de Franch,(2010).
- [9] S. Iovleff, Mathématiques Pour l'informatique 1 : Théorie des Ensembles et Relations (2004), [http ://www.iut-info.univ-lille1.fr/~iovleff](http://www.iut-info.univ-lille1.fr/~iovleff).
- [10] A. Isli, A.G. Cohn, *A new approach to cyclic ordering of 2D orientations using ternary relation algebras*, Artificial Intelligence 122 (2000), 137–187.
- [11] M. Marchand, Outils mathématiques pour l'informaticien, édition 2, *De boeck et Larcier s.a*, 2005.
- [12] V. Novák, M. Novotný, *Pseudodimension of relational structures*, Czechoslovak Mathematical Journal 49 (1999), 547–560.
- [13] V. Novák, M. Novotný, *On representation of cyclically ordered sets*, Czechoslovak Mathematical Journal 39 (1989), 127–132.

- [14] V. Novák, *Cyclically ordered sets*, Czechoslovak Mathematical Journal 32 (1982), 460–473.
- [15] C. S. Peirce, *On the Algebra of Logic*, American Journal of Mathematics 3 (1880), 15–58.
- [16] E. Pitcher, M. F. Smiley, *Transitivity of Betweenness*, Transactions of the American Mathematical Society 52(1942), 95–114.
- [17] D. Ponasse, J.C. Carrega, Algèbre et topologie Booléennes, *Masson*, Paris, 1979.
- [18] M. Pouzet, Cours Théorie de l'ordre : une introduction, *l'université Simon Bolivar*, 2003.
- [19] K.H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, édition 7, *The McGraw-Hill Companies*, 2012.
- [20] L. Zedam, O. Barkat, B. De Baets, Traces of ternary relations, *International Journal of General Systems* 47 (2018), 350–373.
- [21] Site web : www.culture-informatique.net, Conception des bases de données (Modèle EA), Lundi 17 juin 2019.

ملخص:

في هذه المذكرة الخاصة بنهاية الدراسة للحصول على شهادة الماستر، قمنا بدراسة بعض خواص العلاقات الثلاثية الهامة. على وجه الخصوص، تطرقنا لتلك الخواص المشابهة لخواص العلاقات الثنائية.

زيادة على ذلك، درسنا بعض الأصناف المهمة من العلاقات الثلاثية، منها علاقة التكافؤ الثلاثية وعلاقة الوسطية.

كلمات مفتاحية: علاقة ثنائية، علاقة ثلاثية، إسقاطات الثنائية للعلاقات الثلاثية، التوسيعات الاسطوانية للعلاقات الثنائية، علاقة الوسطية، علاقة التكافؤ الثلاثية.

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques propriétés des relations ternaires. En particulier, nous avons porté notre attention sur les propriétés similaires ou analogues aux propriétés des relations binaires.

De plus, nous avons discuté certaines classes particulières de relations ternaires, telles que les relations d'équivalences ternaires et les relations de betweennesses.

Mots Clés : Relation binaire, Relation ternaire, Projections binaires d'une relation ternaire, Extensions cylindrique d'une relation binaire, Relations de betweenness, Relation d'équivalence ternaire.

In this end study memory for obtaining the Master degree, we have studied some properties of ternary relations. In particular, we have paid attention to those properties that are similar or analogous to the properties of binary relations.

Furthermore, we have discussed some particular classes of ternary relations such as, the ternary equivalence relations and the betweenness relations.

Key words : Binary relation, Ternary relation, Binary projections of a ternary relation, Cylindrical extensions of a binary relation, Betweenness relation, Ternary equivalence relation.